COLLEGE JEAN MONNET

PROBABILITÉS

I VOCABULAIRE

Définition : Une expérience est dite aléatoire si elle vérifie deux conditions:
- Elle conduit à des résultats possibles qu'on est parfaitement capable de nommer.
- On ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

On appelle issue le résultat d'une expérience aléatoire.

Exemples : Lancer une pièce de monnaie et noter sur quel côté elle tombe est une expérience aléatoire. « pile » est une issue de cette expérience aléatoire.
Lancer une pièce ayant deux côtés face n'est pas une expérience aléatoire. (on sait u'elle va tomber sur « face »)

Définition : A partir d'une expérience aléatoire, on peut définir ce qu'on appelle des événements qui sont des ensembles d'issues.
Un événement composé d'une seule issue est appelé événement élémentaire

Exemple : Expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces.

Cette expérience comporte 6 issues possibles qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

L'événement E: « obtenir 1 » est un événement élémentaire.
L'événement P: « obtenir un nombre pair » est un événement. C'est l'ensemble des événements élémentaires « obtenir 2 » ou « obtenir 4 » ou « obtenir 6 ». Les issues pour réaliser cet événement sont donc : 2;4 et 6

Définition : l'événement contraire d'un événement A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$

Exemple : Expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces.

Si E: « obtenir 1 » alors $\overline{E}$**: « obtenir un autre nombre que 1 »**
Si P: « obtenir un nombre pair » alors $\overline{P}$**: « obtenir un nombre impair »**

Définition : Un événement impossible si aucune issue ne le réalise.
Un événement est dit certain si toutes les issues le réalise.

Exemple : Expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces.

Événement impossible : « obtenir un 8 »
Événement certain : « obtenir un nombre plus petit que 32 »

II PROBABILITÉS

Définition : Lors d'une expérience aléatoire répétée n fois, on compte le nombre n_A de fois où l'événement A est réalisé.

Lorsque le nombre n d'expériences devient grand, la fréquence d'apparition de A (c'est à dire $\frac{n_A}{n}$)

tend à se stabiliser autour d'un nombre particulier appelé probabilité de A. On note cette probabilité : p(A).

Exemple : Expérience aléatoire : lancer une pièce de monnaie.

Si on tire à pile ou face un grand nombre de fois la fréquence de sorti de face se rapproche de 0,5,

Si F: « obtenir une face » p(F) = $\frac{1}{2}$

Théorème : Quand les issues d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement A est égale au quotient : $p(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$

Exemple : Expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces.
On lance un dé à 6 faces. On note A l'événement « obtenir un nombre inférieur à 5 » Le nombre d'issues favorable à A est 4 (on obtient 1 ; 2 ; 3 ou 4). Le nombre d'issues total est:6
Donc $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Expérience aléatoire : tirer une boule dans une urne.
On tire au hasard une boule dans un sac contenant 8 boules dont 3 sont rouges et 5 sont vertes, la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{3}{8}$.

NB : lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Exemple : Si le dé est équilibré, on a une probabilité de chaque événement de $\frac{1}{6}$.

Théorèmes :

- La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalisent.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires possibles d'une expérience aléatoire est égale à 1.
- si p est la probabilité d'un événement alors 1-p est la probabilité de l'événement contraire.

Exemple : Expérience aléatoire : Tirer une carte dans un jeu de 32,

Soit I: « obtenir un 13 de cœur » I événement impossible p(I) = 0
Soit C: « obtenir une carte qui soit un cœur, un pique, un carreau ou un trèfle » C événement certain p(C)=1

Soit E l'événement : « tirer un roi ou un trèfle » E est réalisé lors d'une des 11 issues : roi de coeur, roi de pique, roi de carreau, roi de trèfle et les sept autres trèfles.

Il y a donc onze fois 1 chance sur 32 de tirer un as ou un trèfle, soit une probabilité p(E)= $\frac{11}{32}$

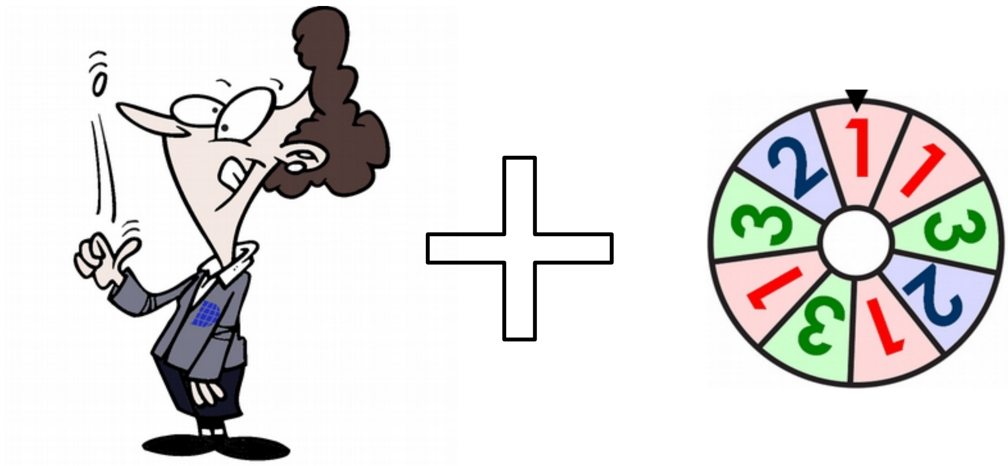
Soit $\overline{E}$ l'événement contraire de E

$\overline{E}$: « tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un trèfle » p($\overline{E}$)= $1-\frac{11}{32} = \frac{32}{32}-\frac{11}{32}=\frac{21}{32}$

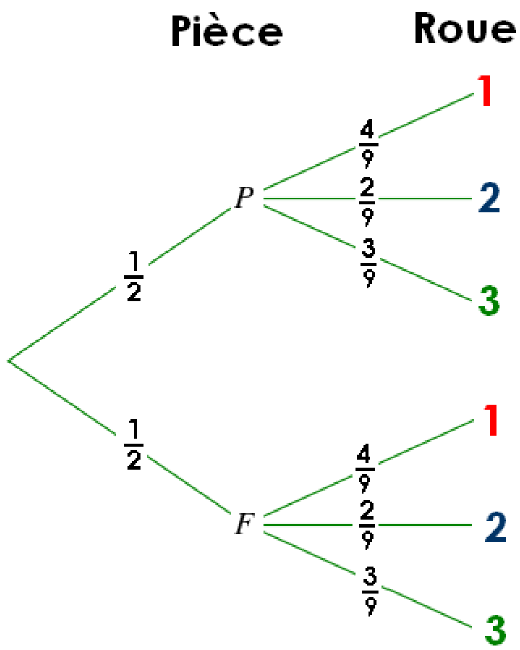
III ARBRES

On utilise souvent un arbre pondéré lorsque l'on effectue une expérience aléatoire à deux épreuves.

Exemple : On joue à Pile (P) ou Face (F) avec une pièce bien équilibrée. Ensuite, on fait tourner la roue bien équilibrée ci-dessous et on relève le numéro du secteur qui s'arrête face au repère.



On obtient l'arbre pondéré suivant :



On admet que la probabilité d'obtenir l'issue (P ; 1) est égale au produit des probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{9}$ rencontrées successivement sur les branches menant à l'issue (P ; 1)